



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN E IMÁGENES

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-I



IMAGEN Y PREIMAGEN

Definición:

Dada una función $f: A \rightarrow B$, a cada elemento $c \in A$ se le asocia un único elemento $d \in B$, según la siguiente regla de correspondencia:

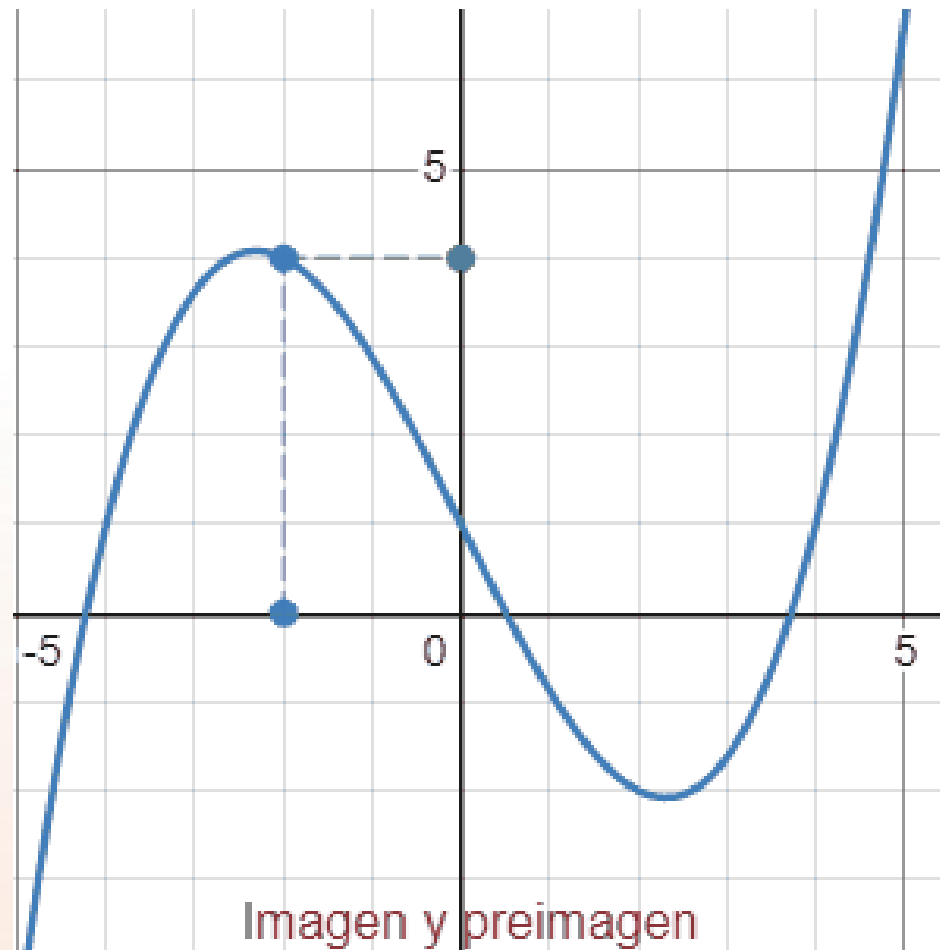
$$d = f(c)$$

- Llamamos a c **preimagen** de d .
- Llamamos a d **imagen** de c .

Ejemplos

1. $f(x) = x^2 - 3x$ entonces la imagen de $x = 3$ es $y = f(3) = 0$.
2. $f(x) = x^2$ entonces la preimagen de $y = 4$ se obtiene al resolver:
 $4 = f(x) = x^2$ entonces $x = -2$ o $x = 2$ son preimágenes de 4.

IMAGEN Y PREIMAGEN



<https://www.desmos.com/calculator/wy6sfzib52>

IMAGEN Y PREIMAGEN

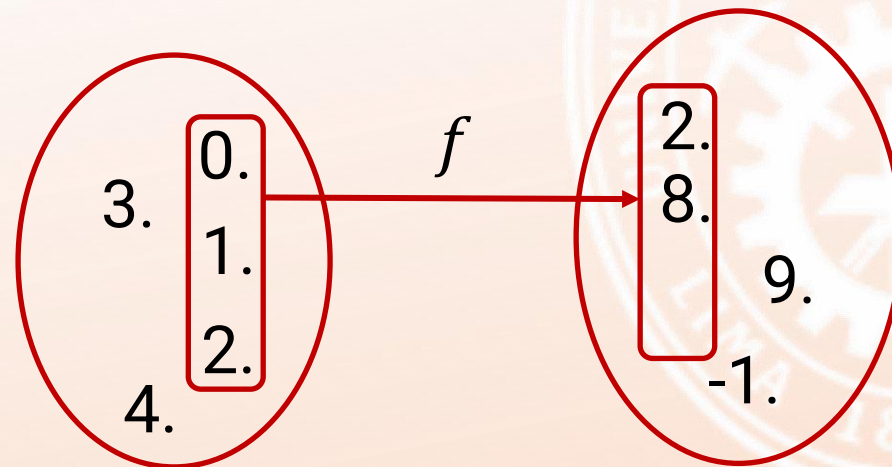
Definición:

Dada una función $f: \text{Dom}(f) = A \rightarrow B$, y $M \subset \text{Dom}(f)$. Se define, el **conjunto imagen de M vía f** , denotado $f(M)$, como:

$$f(M) := \{f(x)/x \in M\} \subset B.$$

Ejemplo: Sea $f = \{(0,2), (1,8), (2,8), (4,9), (3,-1)\}$. Determine la **imagen** de $A = \{0,1,2\}$.

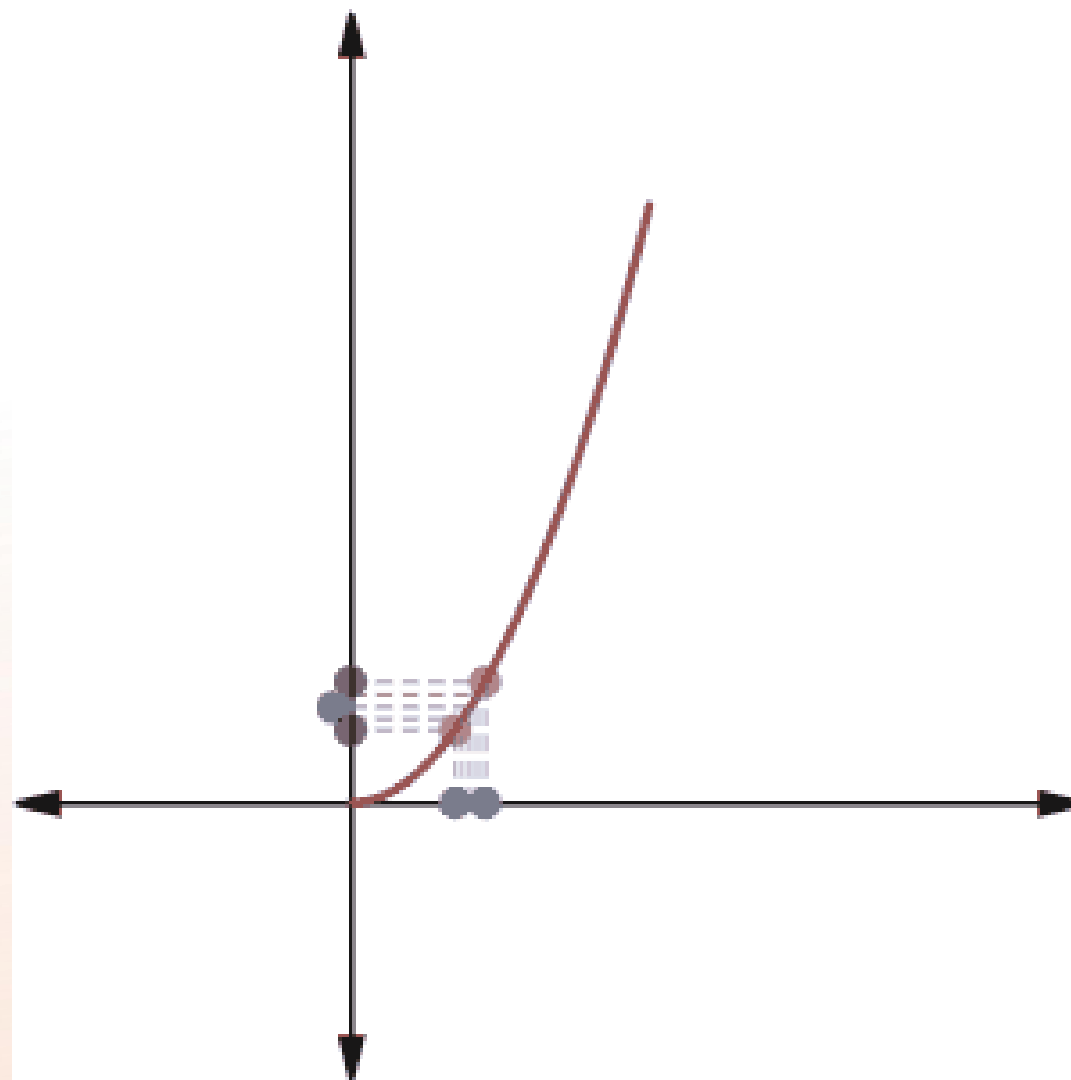
Solución:



$$f(\{0,1,2\}) = \{2,8\}$$

$$f(A) = \{2,8\}$$

IMAGEN Y PREIMAGEN



<https://www.desmos.com/calculator/fn1u8spovz>

IMAGEN Y PREIMAGEN

Propiedades:

Dada $f: A \rightarrow B$ una función y A_1 y A_2 subconjuntos de A . Entonces:

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$. Determine la imagen de $M = [-2,0] \cup [2,3]$.

Solución: Dados $A_1 = [-2,0]$, y $A_2 = [2,3]$, así $M = A_1 \cup A_2$

1. Si $x \in A_1$ entonces $-2 \leq x \leq 0 \rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$
entonces $f(A_1) = [0,4]$
2. Si $x \in A_2$ entonces $2 \leq x \leq 3 \rightarrow 4 \leq f(x) \leq 9 \rightarrow f(A_2) = [4,9]$.
3. La imagen de M es $f(M) = f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0,9]$

IMAGEN Y PREIMAGEN

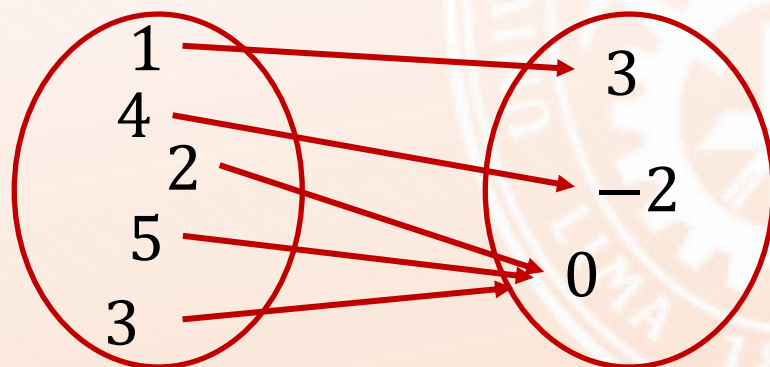
Definición:

Dada una función $f: Dom(f) \rightarrow B$, y $E \subset B$. Se define, el conjunto **imagen inversa de E** vía f , también denominado **preimagen de E** , $f^{-1}(E)$, como:

$$f^{-1}(E) := \{x \in Dom(f) / f(x) \in E\} \subset Dom(f).$$

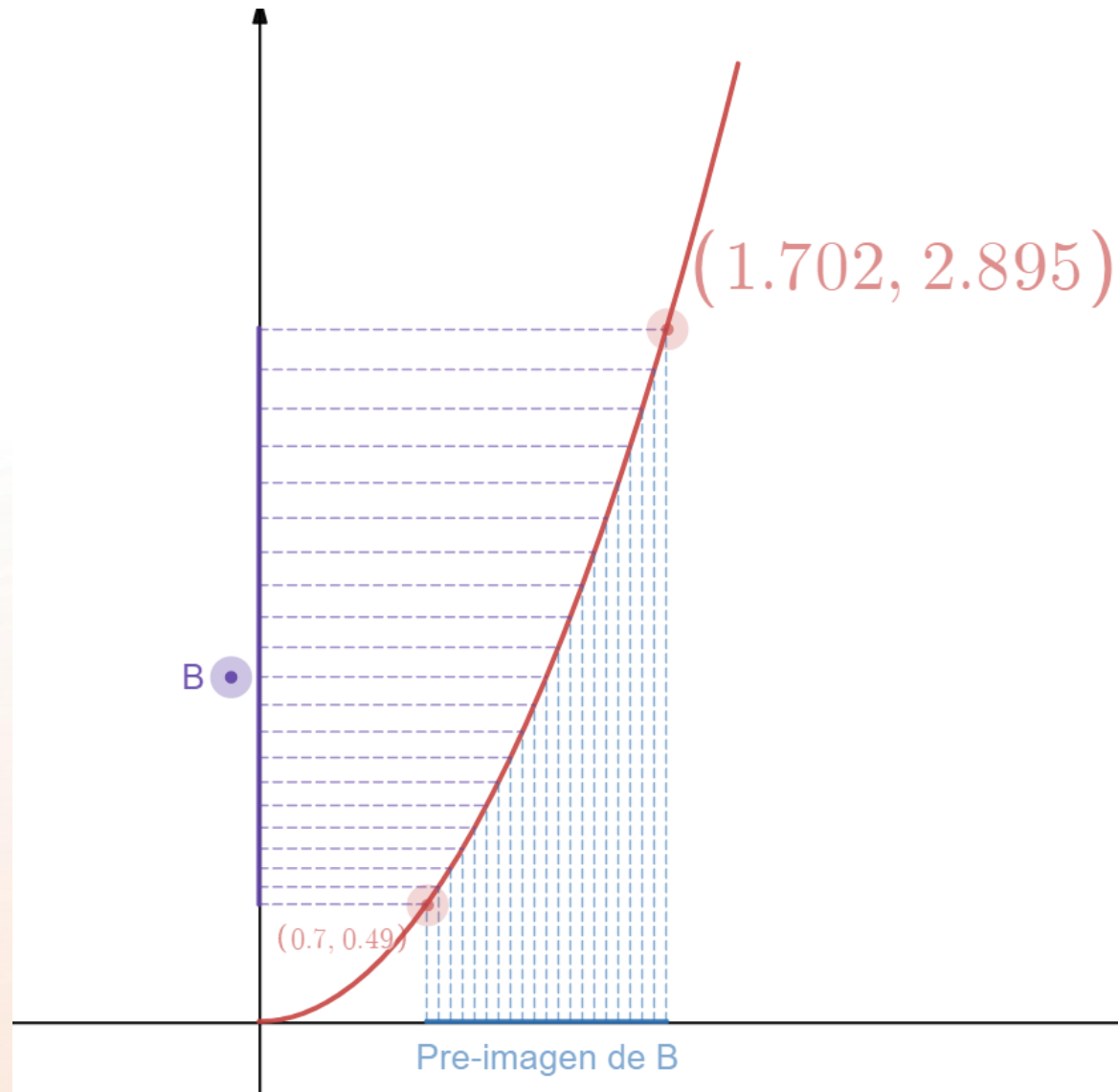
Ejemplo: Sea $f = \{(1,3), (4,-2), (2,0), (5,0), (3,0)\}$. Determine la **preimagen** de $\{0\}$.

Solución:



$$f^{-1}(\{0,3\}) = \{1,2,3,5\}$$

IMAGEN Y PREIMAGEN



<https://www.desmos.com/calculator/f2yb3jtsij>

IMAGEN Y PREIMAGEN

Propiedades:

Dada $f: A \rightarrow B$ una función y B_1 y B_2 subconjuntos de B . Entonces:

- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$. Determine la preimagen de $B = [0,4] \cup [9,25]$.

Solución: Dados $B_1 = [0,4]$ y $B_2 = [9,25]$

1. $f^{-1}(B_1) = \{x / x^2 \in B_1 = [0,4]\} = \{x / 0 \leq x^2 \leq 4\}$ resolvemos y tenemos que $f^{-1}(B_1) = [-2,2]$.
2. De manera similar, $f^{-1}(B_2) = [-5, -3] \cup [3,5]$.
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = [-5, -3] \cup [-2,2] \cup [3,5]$

IMAGEN Y PREIMAGEN

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$. Determine la preimagen de $B = [0,4] \cup [9,25]$.

Solución gráfica:

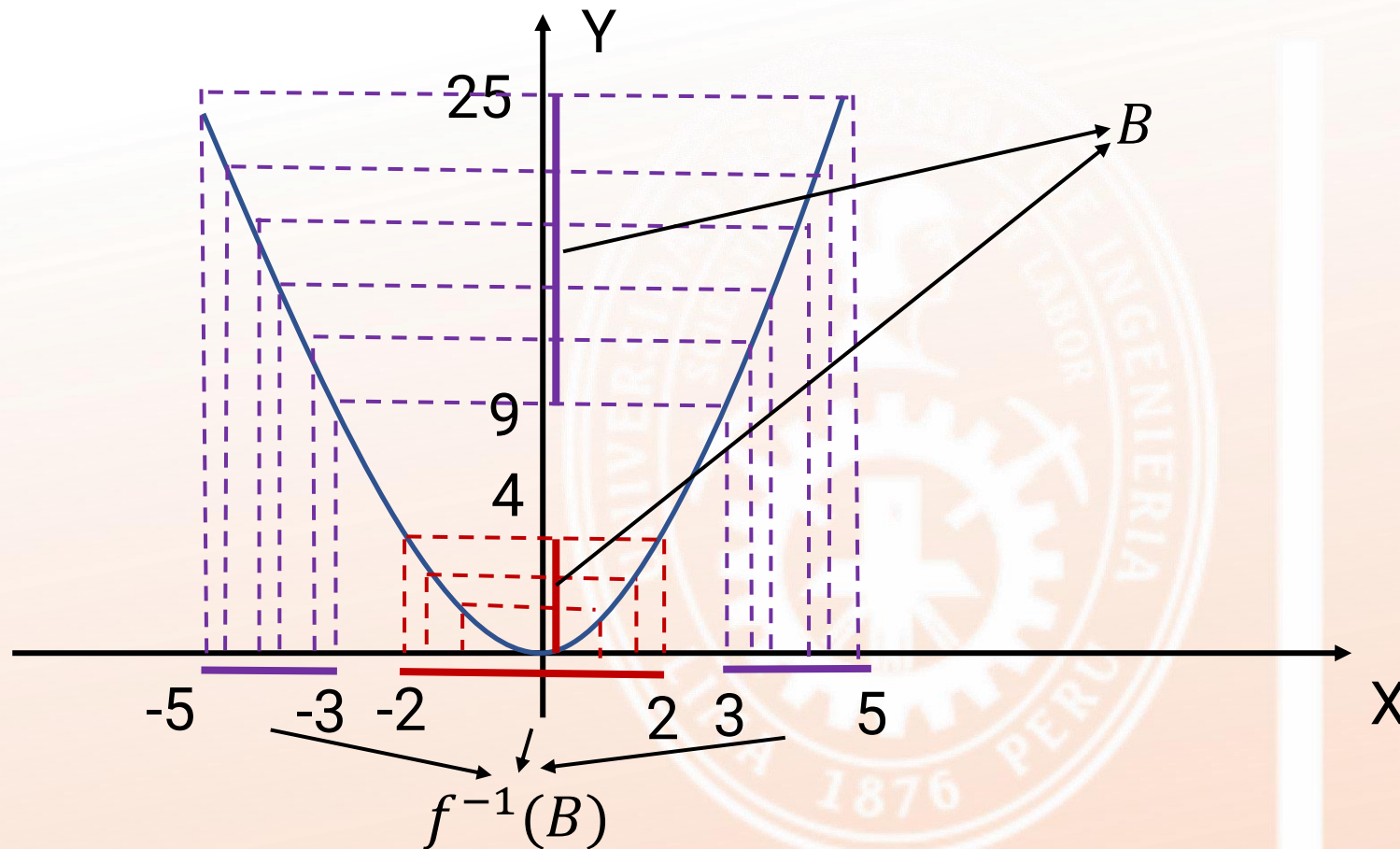


IMAGEN Y PREIMAGEN

Ejercicio:

Dadas la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \frac{x + 6}{x + 5}$$

Calcule:

- a) $f(< -\infty, -12])$
- b) $f^{-1}(\{2\})$
- c) $f^{-1}([1, 2 >)$
- d) $f^{-1}([1, 3 >)$.

Ejercicio:

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

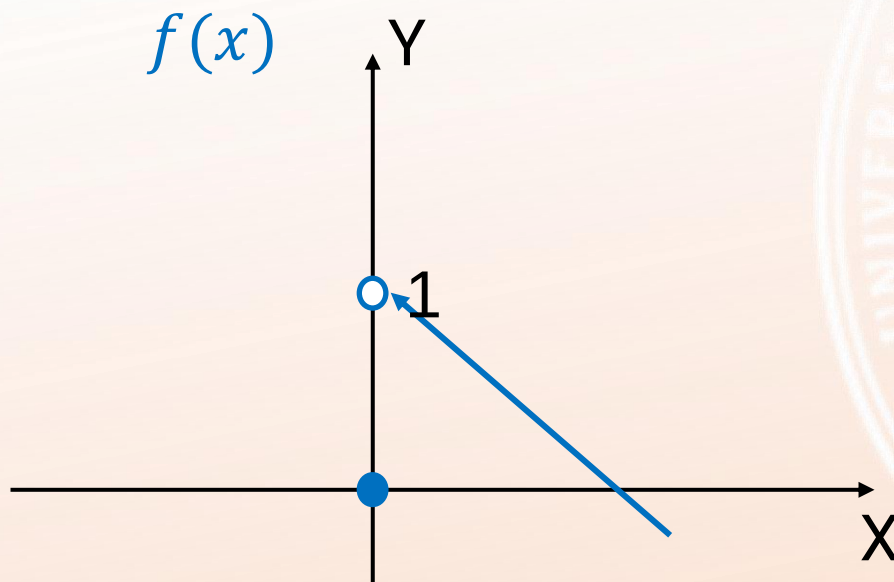
- I. Si $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$.
- II. Si $f(A) \subset f(B)$ entonces $A \subset B$.
- III. Para $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(f(A)) = A$
- IV. Para $B \subset \mathbb{R}$, $f(f^{-1}(B)) = B$

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Introducción:

La gráfica de algunas funciones se puede conseguir a partir de la gráfica de una función elemental, por medio de una o mas técnicas de graficación.

Ejemplo: Dada la gráfica de f .



Determine la gráfica de:

$$g_1(x) = f(x - 4),$$

$$g_2(x) = f(6 - x),$$

$$g_3(x) = f(|x| - 1),$$

$$g_4(x) = f(|2 - |x||),$$

$$g_5(x) = f(\text{sgn}(x)),$$

?

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES HORIZONTALES

La gráfica de $y = f(x - h)$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente h unidades.

- Hacia la **derecha**, si $h > 0$.
- Hacia la **izquierda**, si $h < 0$.

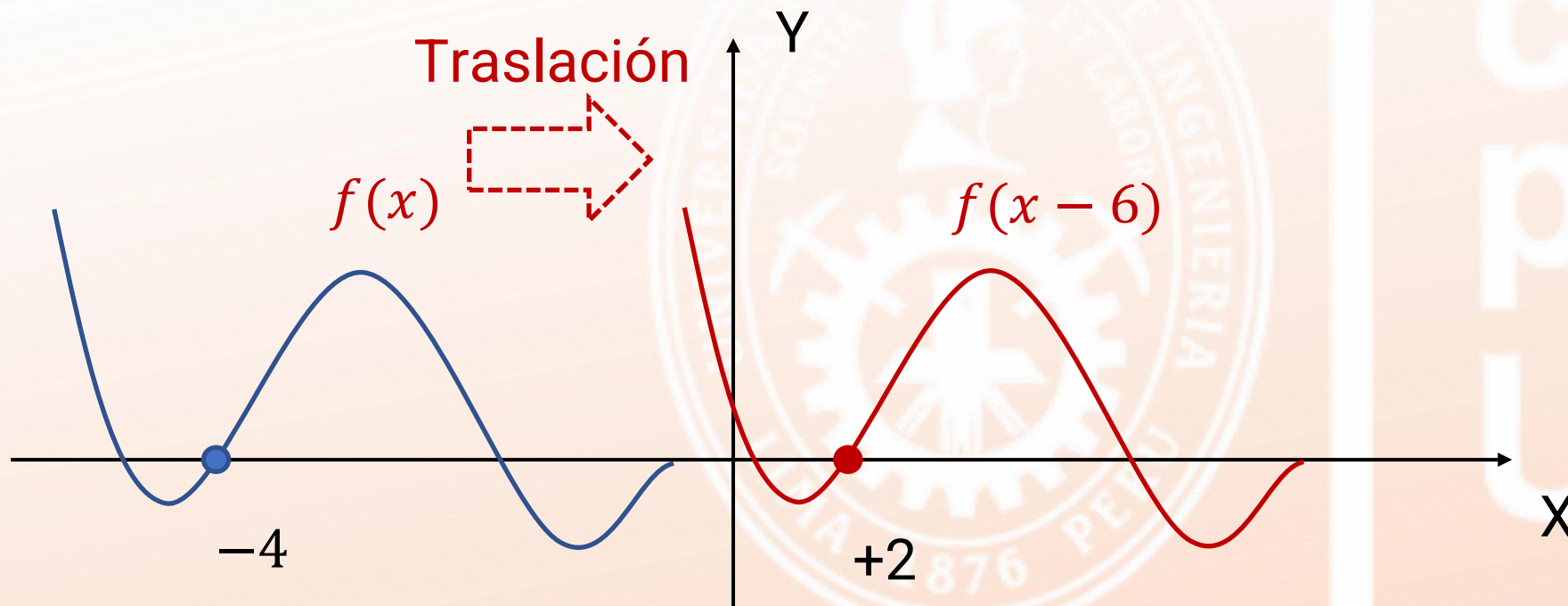
Ejemplo: Dado $f(x)$. Determine si la traslación es derecha o izquierda:

1. $f(x - 2)$ es traslación derecha en 2 unidades.
2. $f(x + 2)$ es traslación izquierda en 2 unidades.
3. $f(x - 3)$ es traslación derecha en 3 unidades.
4. $f(x + 5)$ es traslación Izquierda en 5 unidades.

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES HORIZONTALES HACIA LA DERECHA

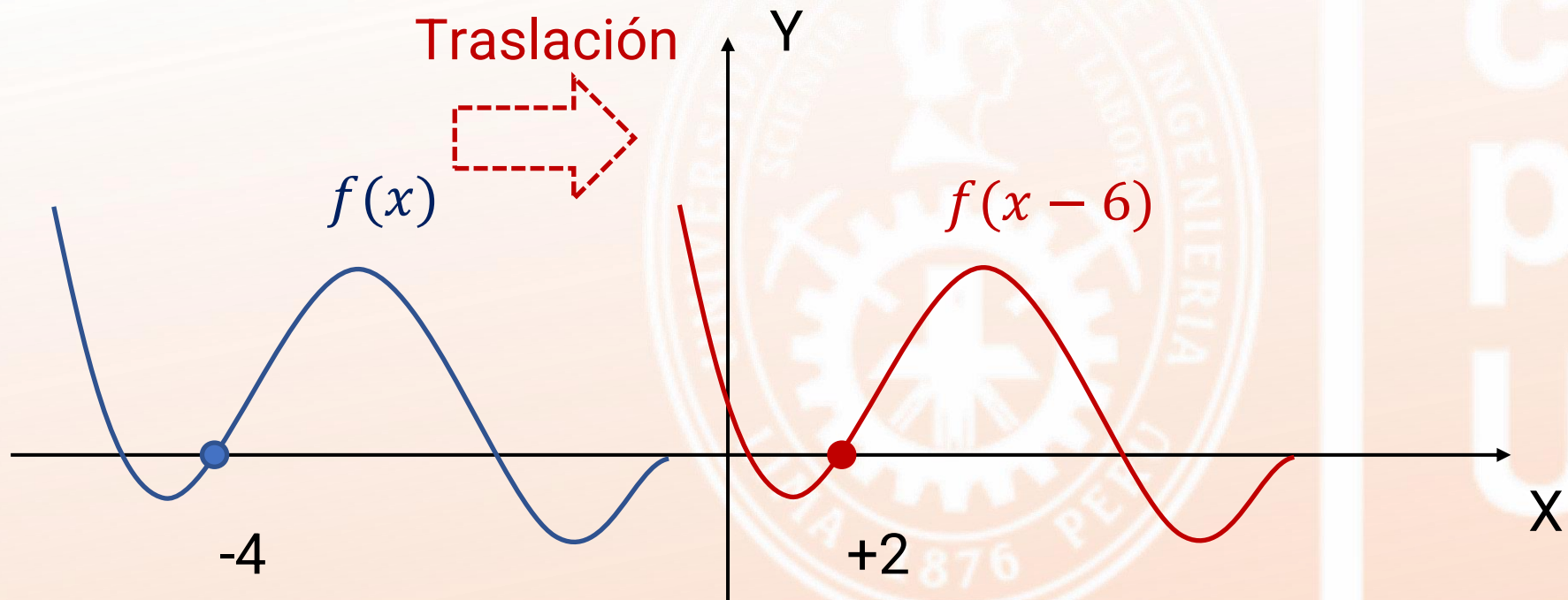
La gráfica de $y = f(x - 6)$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente **6 unidades a la derecha**.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES HORIZONTALES HACIA LA DERECHA

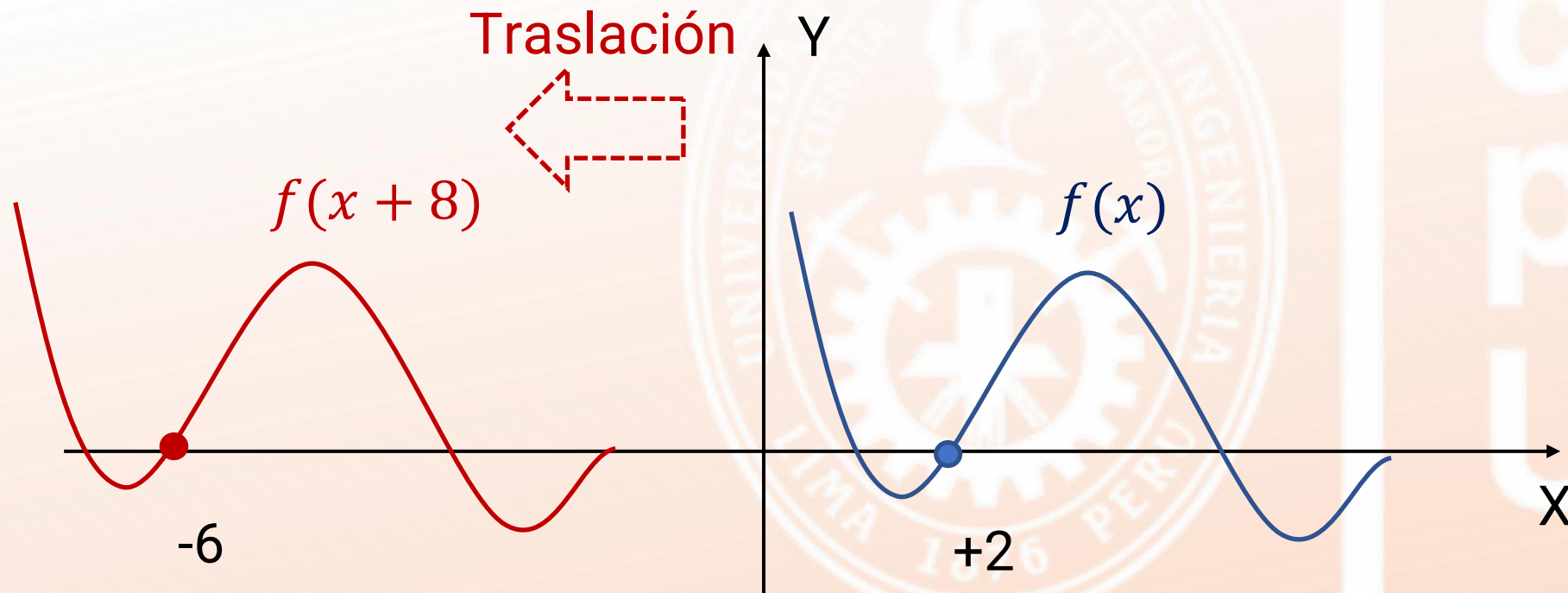
La gráfica de $y = f(x - 6)$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente **6 unidades a la derecha**.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES HORIZONTALES HACIA LA IZQUIERDA

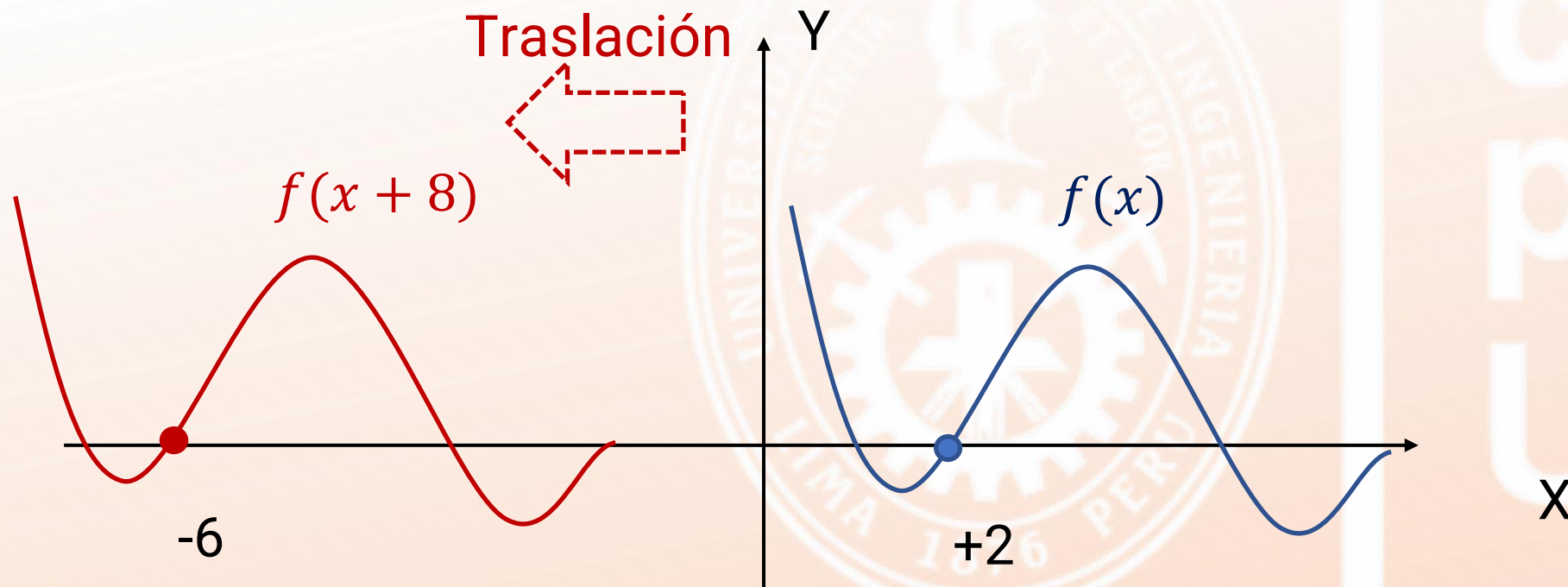
La gráfica de $y = f(x + 8)$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente **8 unidades a la izquierda**.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES HORIZONTALES HACIA LA IZQUIERDA

La gráfica de $y = f(x + 8)$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente 8 unidades a la izquierda.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES VERTICALES

La gráfica de $y = f(x) + k$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente k unidades.

- Hacia **arriba**, si $k > 0$.
- Hacia **abajo**, si $k < 0$.

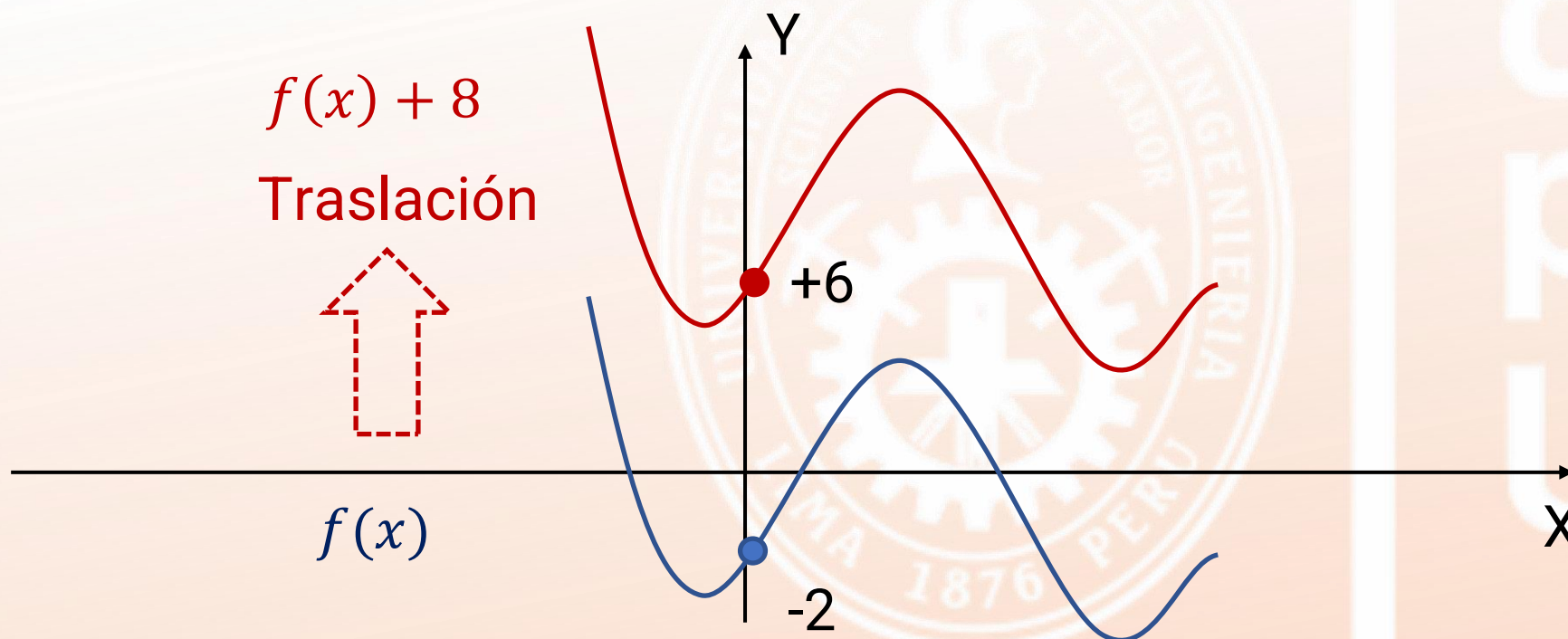
Ejemplo: Dada $f(x)$. Determine si la traslación vertical es arriba o abajo:

1. $f(x) - 1$ es vertical hacia abajo.
2. $f(x) + 2$ es vertical hacia arriba.
3. $f(x) - 3$ es vertical hacia abajo.
4. $f(x) + 5$ es vertical hacia arriba.

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES VERTICALES HACIA ARRIBA

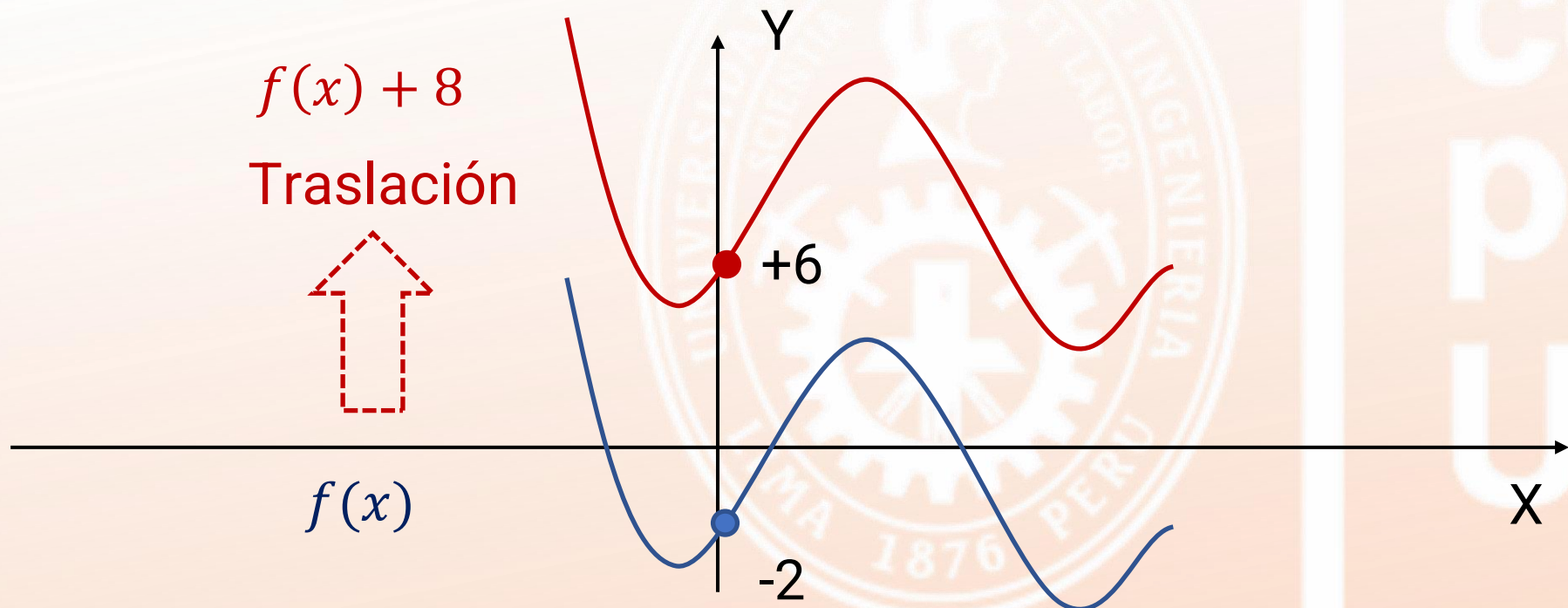
La gráfica de $y = f(x) + 8$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente hacia arriba 8 unidades.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES VERTICALES HACIA ARRIBA

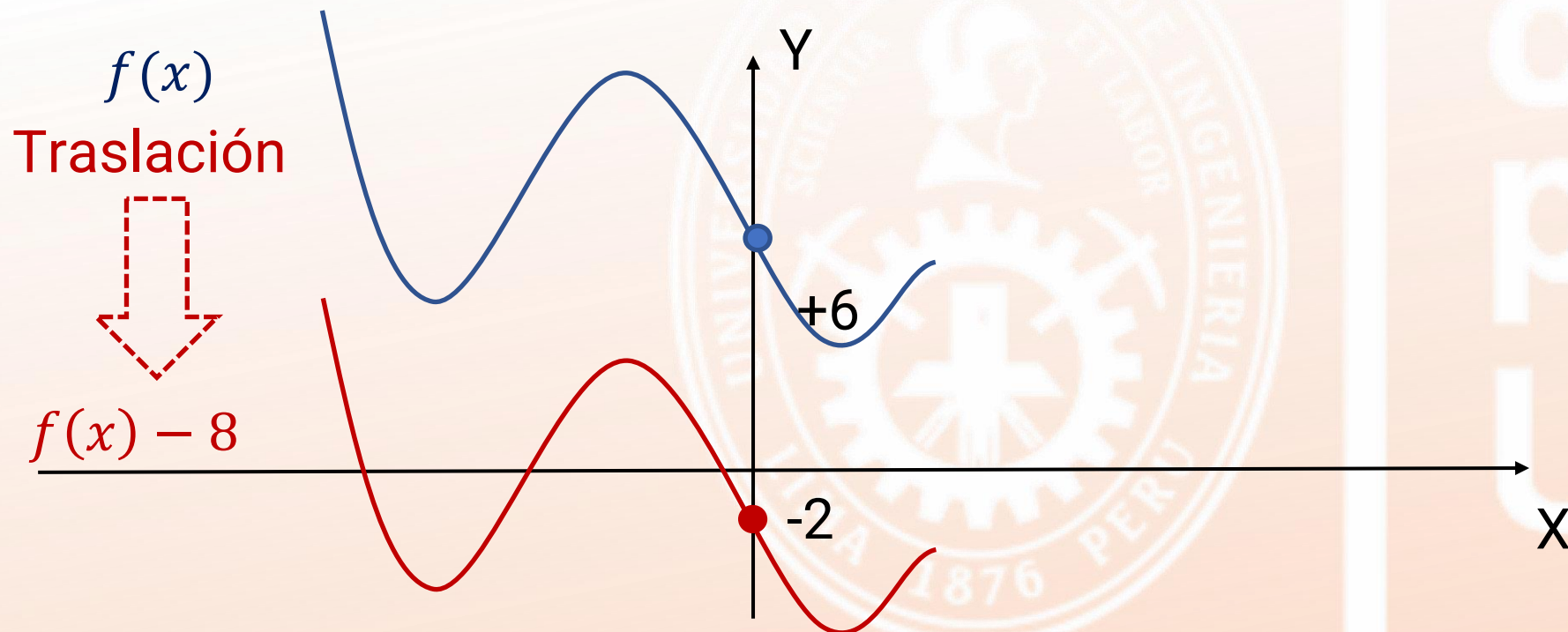
La gráfica de $y = f(x) + 8$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente hacia arriba 8 unidades.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIONES VERTICALES HACIA ABAJO

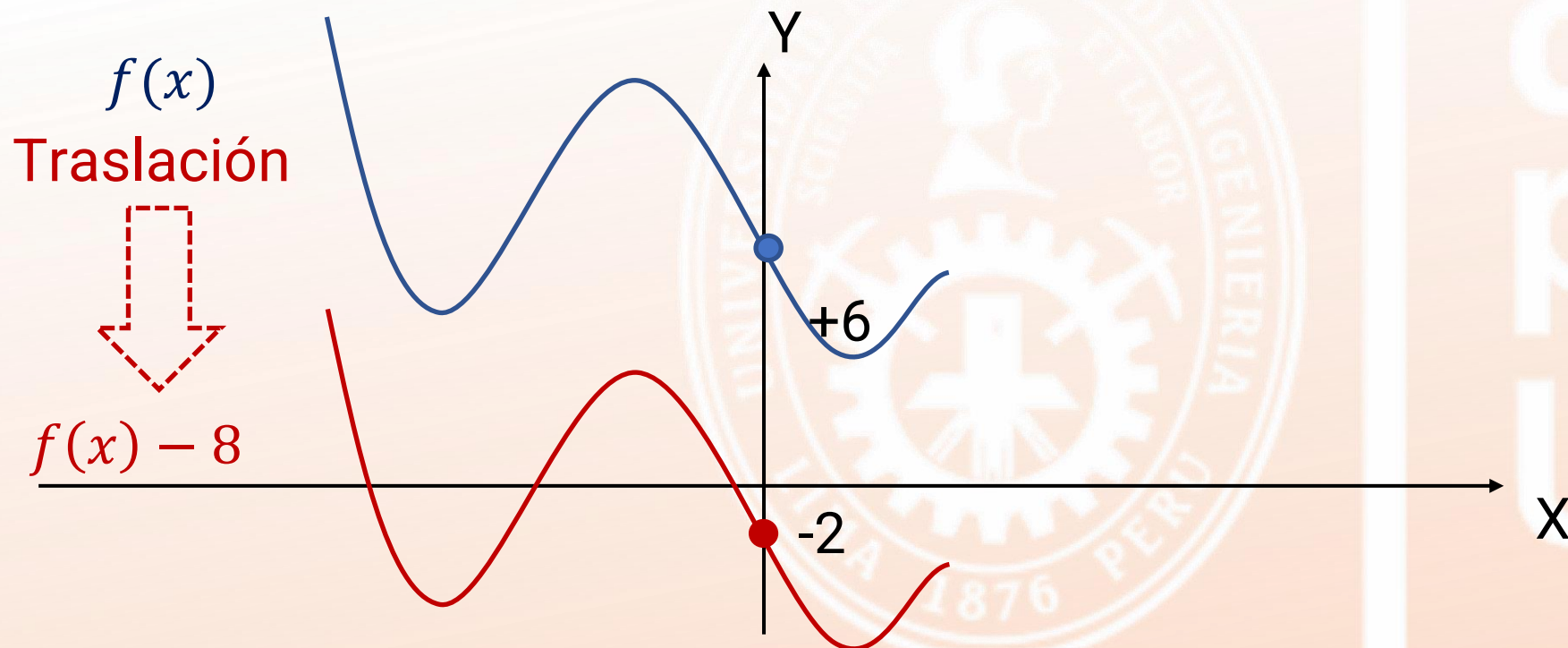
La gráfica de $y = f(x) - 8$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente hacia abajo 8 unidades.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

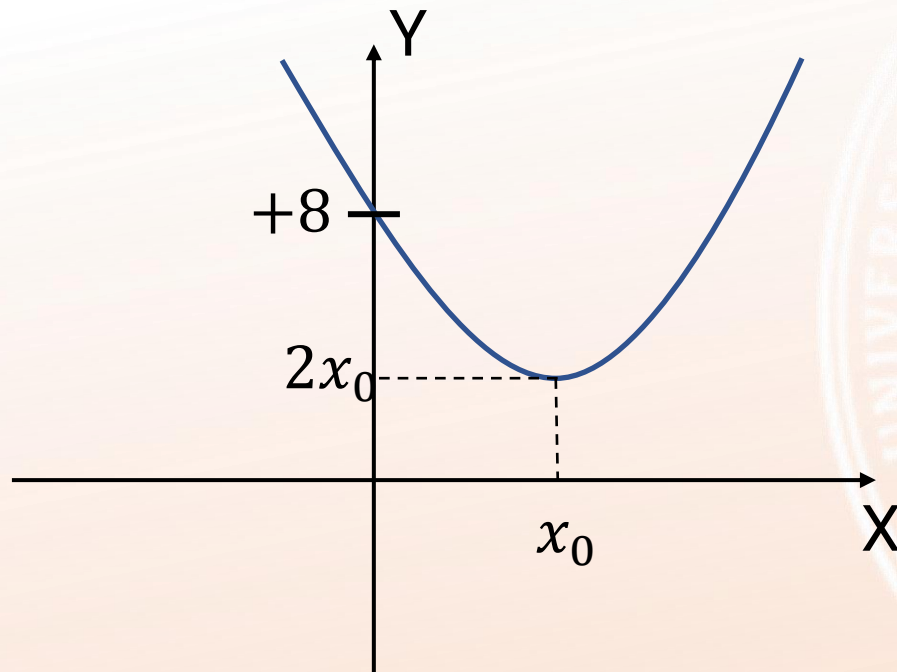
TRASLACIONES VERTICALES HACIA ABAJO

La gráfica de $y = f(x) - 8$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente hacia abajo 8 unidades.



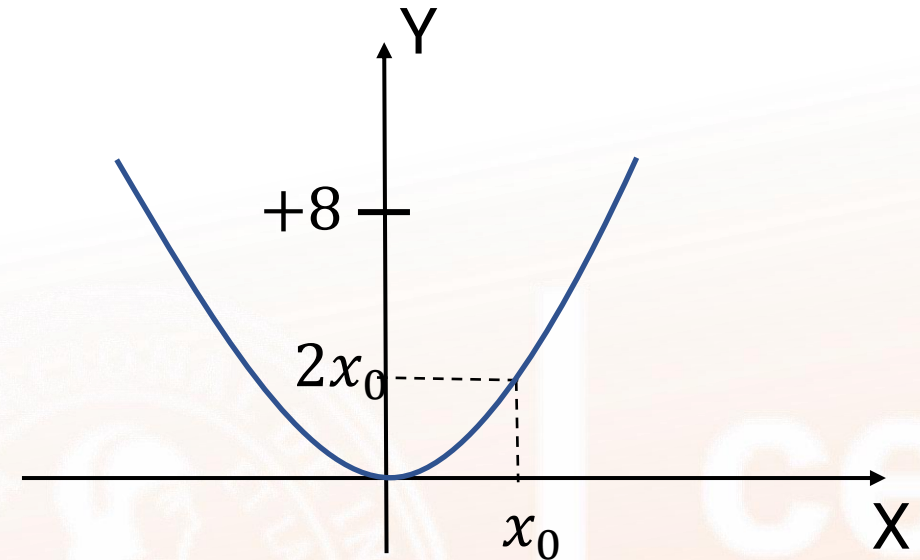
Ejemplo :

Dada la gráfica, de la función cuadrática f , determine la suma de valores de $x_0 \in \mathbb{R}$, sabiendo que f es mónico.



Suma de valores es -2

Solución:



$$f(x) = ax^2 \quad \rightarrow \quad f(x) = a(x - x_0)^2 + 2x_0$$

Coeficiente de mayor grado es igual a 1 $\rightarrow a = 1$

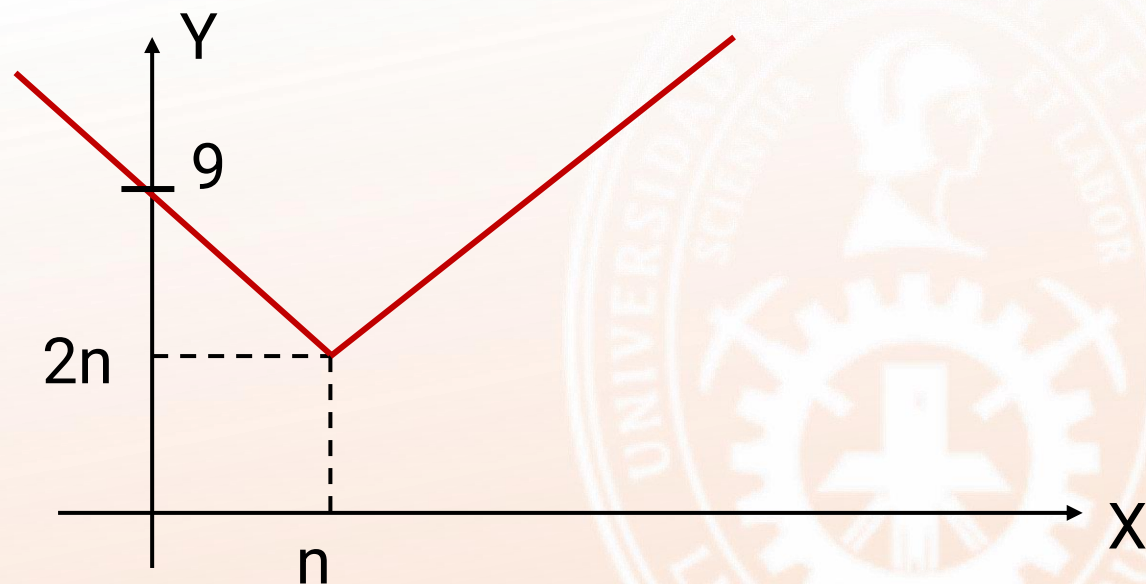
Intersección eje Y: 8 $\rightarrow f(0) = 8$

$$x_0^2 + 2x_0 = 8 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= -4 \\ x_0 &= 2 \end{aligned}$$

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Ejercicio:

Dada la función f con $f(x) = |x + a| + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$, y cuya gráfica es:

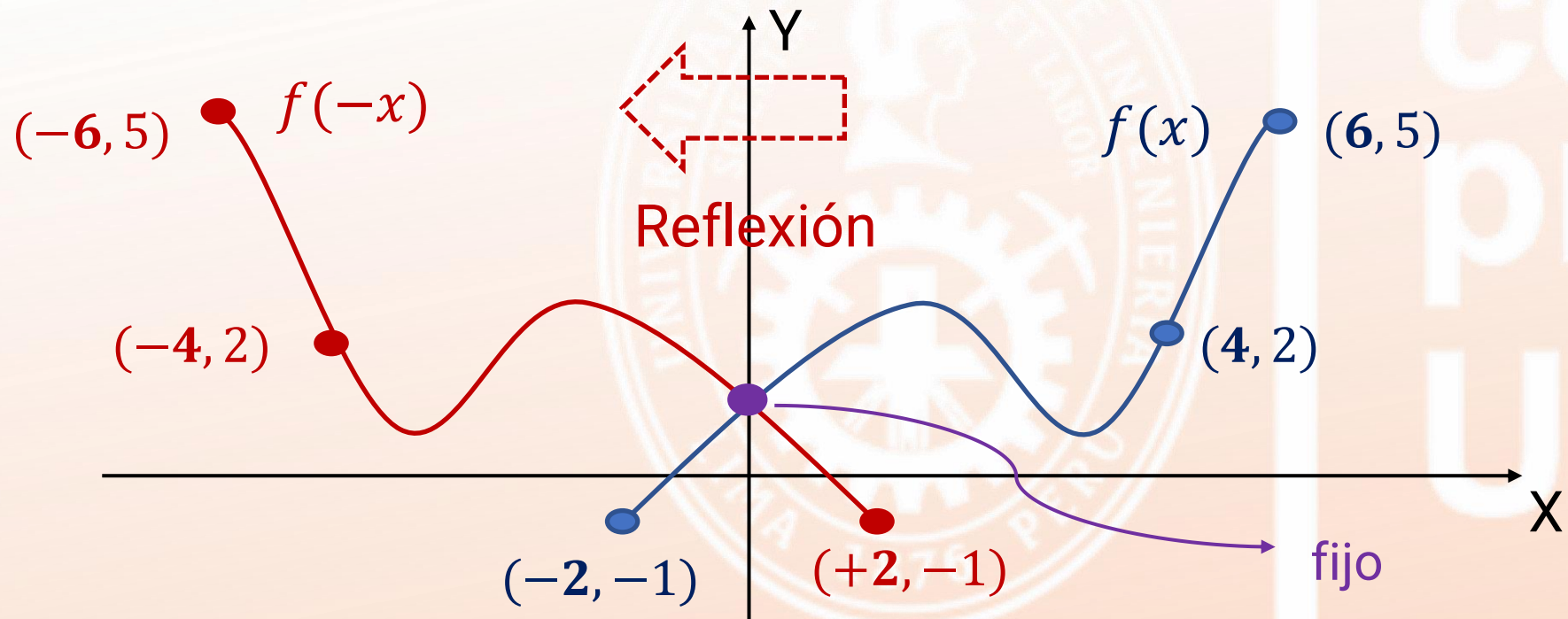


Determinar el valor de $M = a \cdot b$.

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

REFLEXION HORIZONTAL(EJE Y)

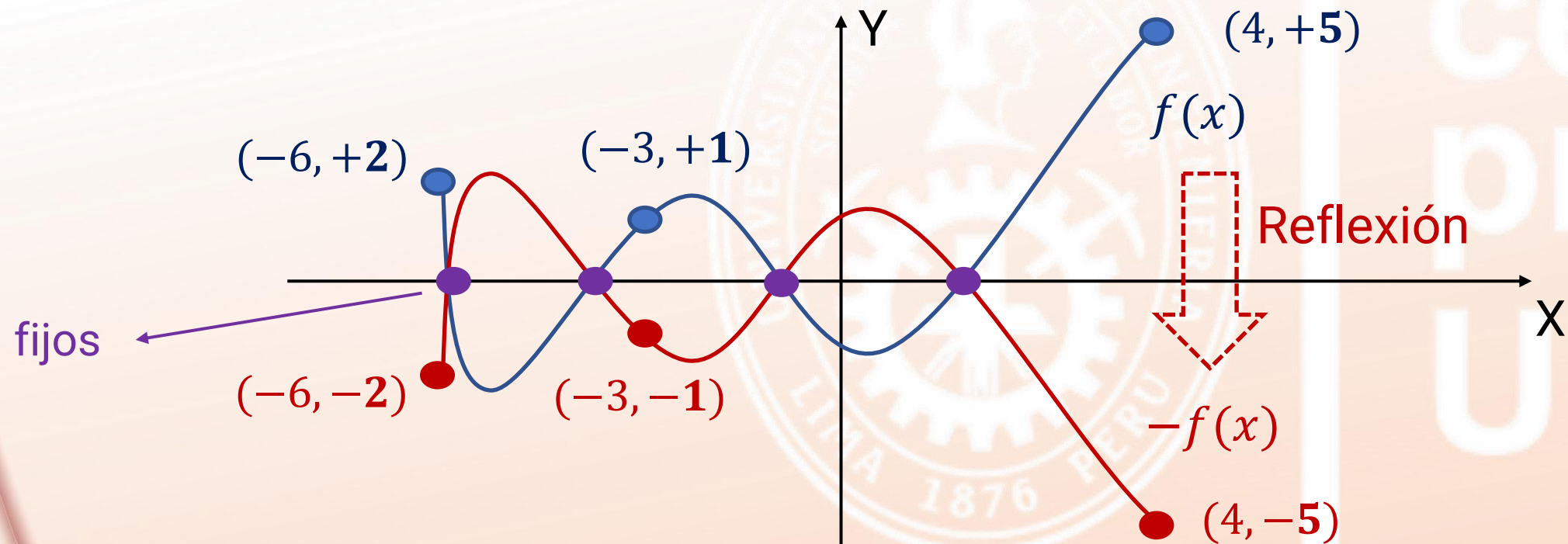
La gráfica de $y = f(-x)$, se obtiene reflejando la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje Y.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

REFLEXION VERTICAL(EJE X)

La gráfica de $y = -f(x)$, se obtiene reflejando la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje X .

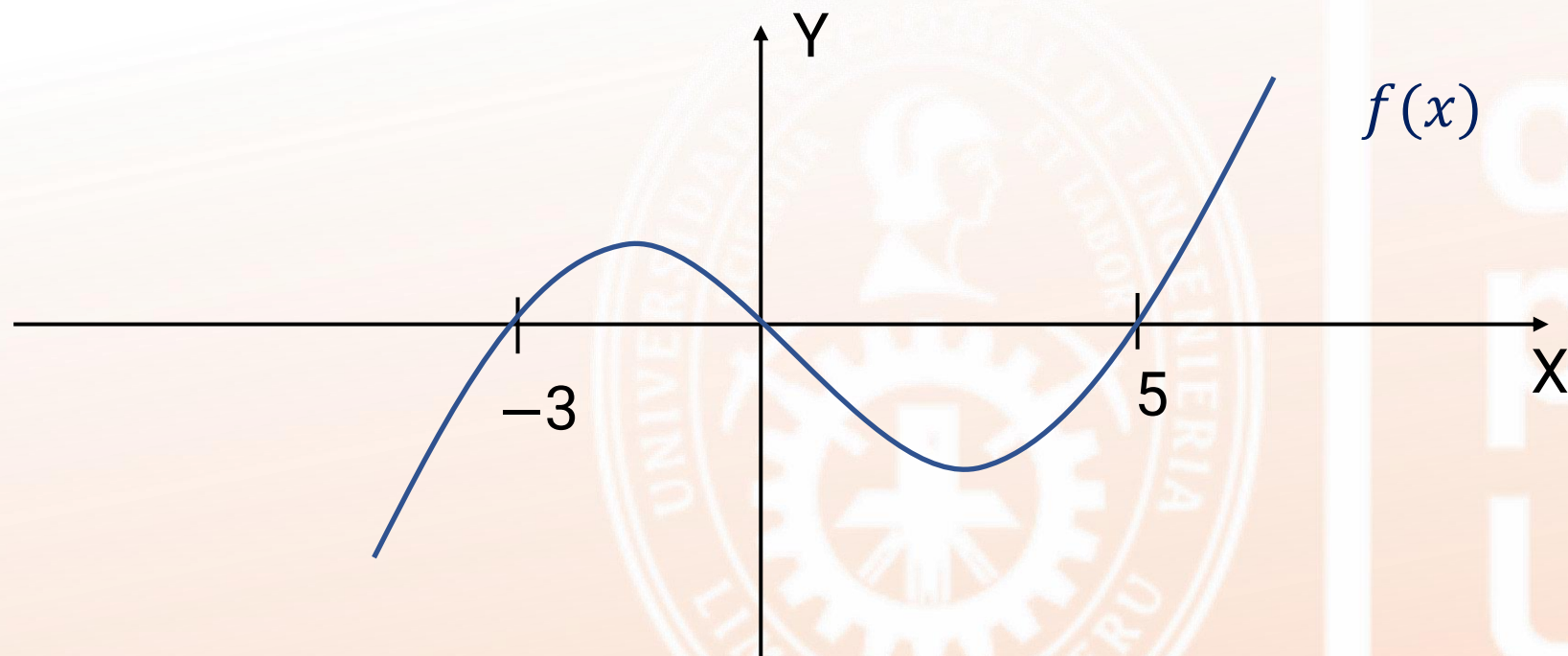


TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Ejemplo

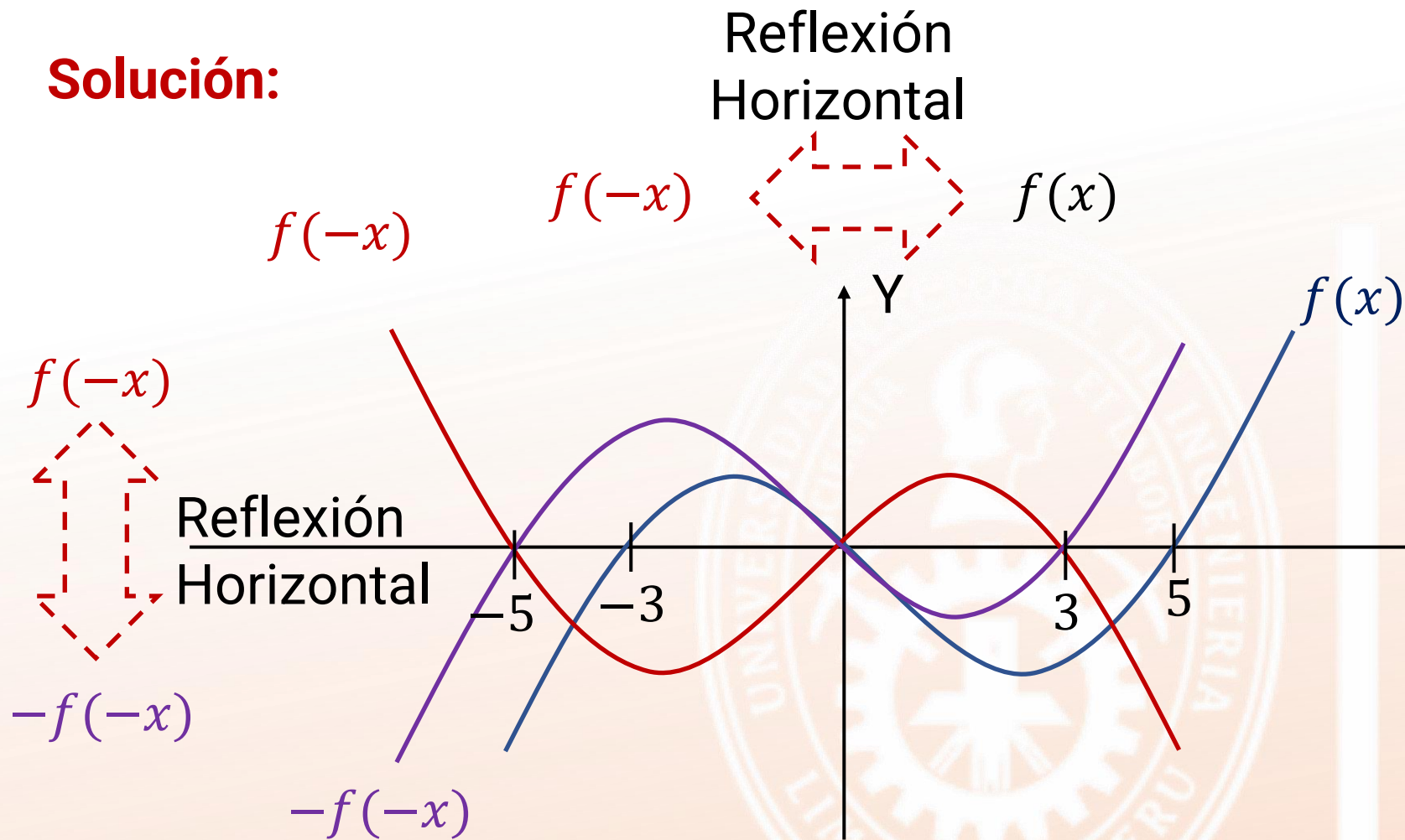
Sea $f(x) = (x + 3)x(x - 5)$.

Determine la gráfica de $y = -f(-x)$.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

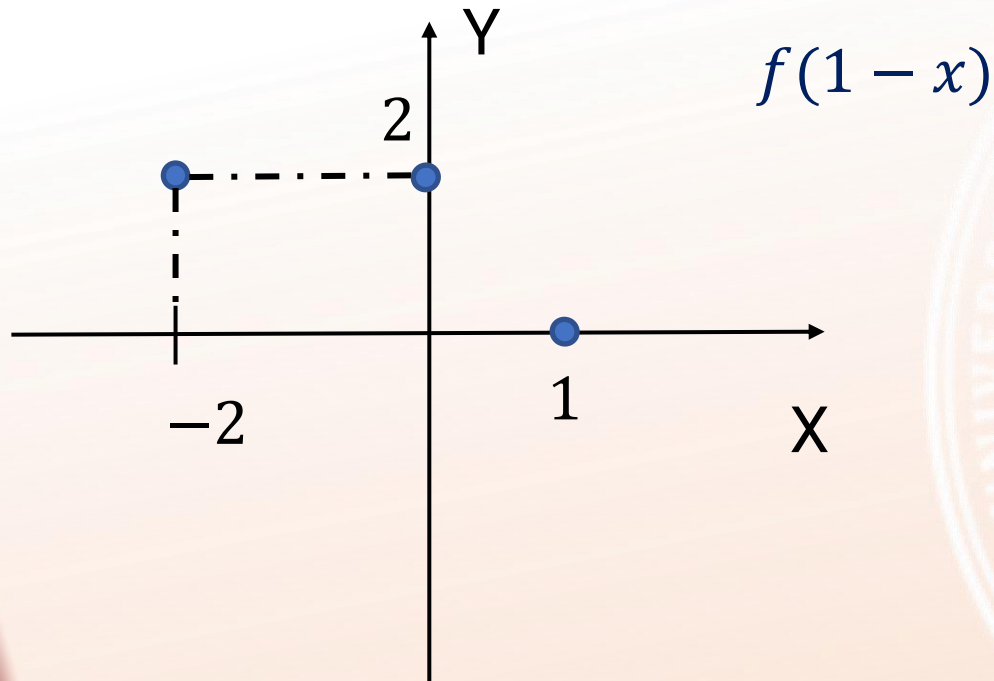
Solución:



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

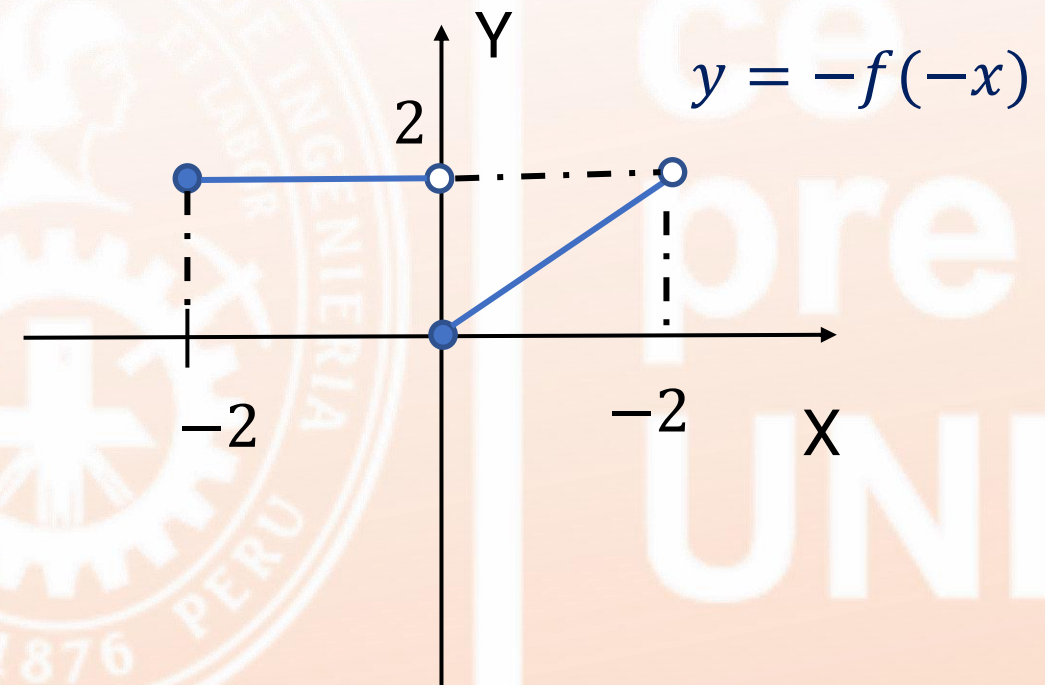
Ejercicio:

Determine la gráfica de $y = f(x - 2)$, si la grafica $y = f(1 - x)$ es:



Ejercicio:

Determine la gráfica de $y = 1 - f(x)$, si la grafica de Dada la gráfica de $y = -f(-x)$ es:

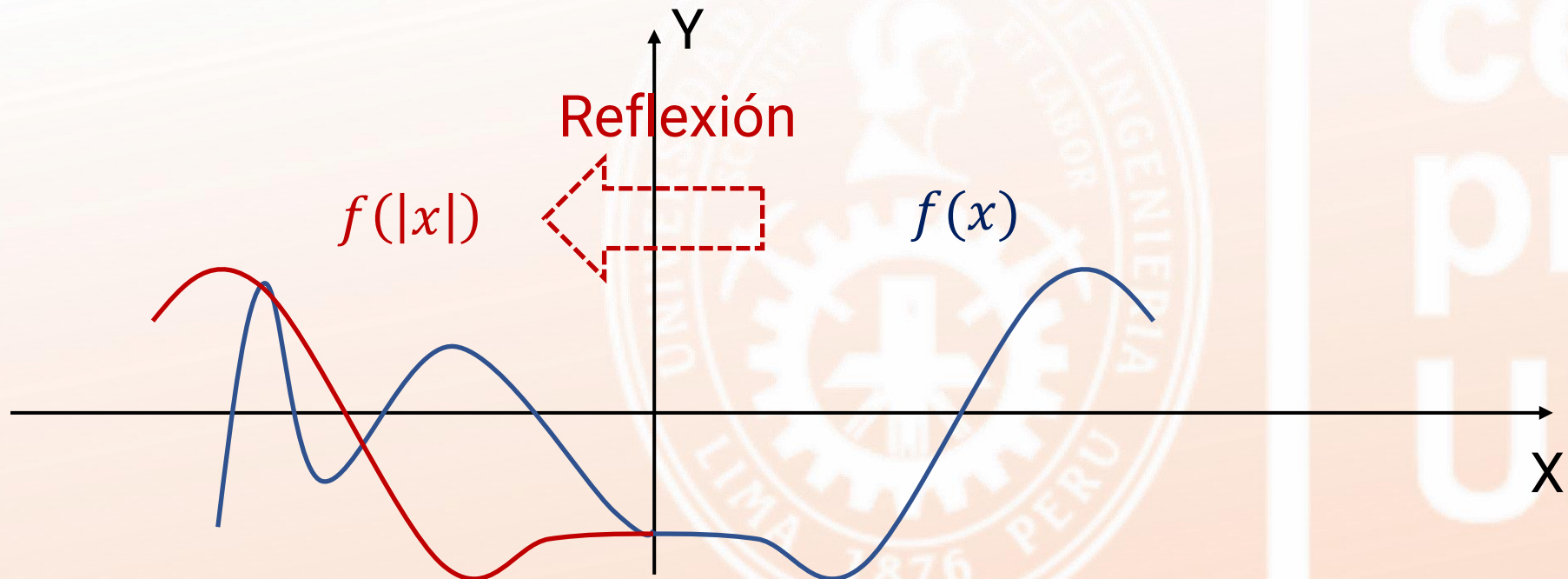


TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

GRAFICAS CON VALOR ABSOLUTO

La gráfica de $y = f(|x|)$, se obtiene:

- Si $x \geq 0$ la gráfica no cambia.
- Si $x < 0$ la gráfica se obtiene reflejando horizontalmente la gráfica de $f(x)$ cuando $x \geq 0$.

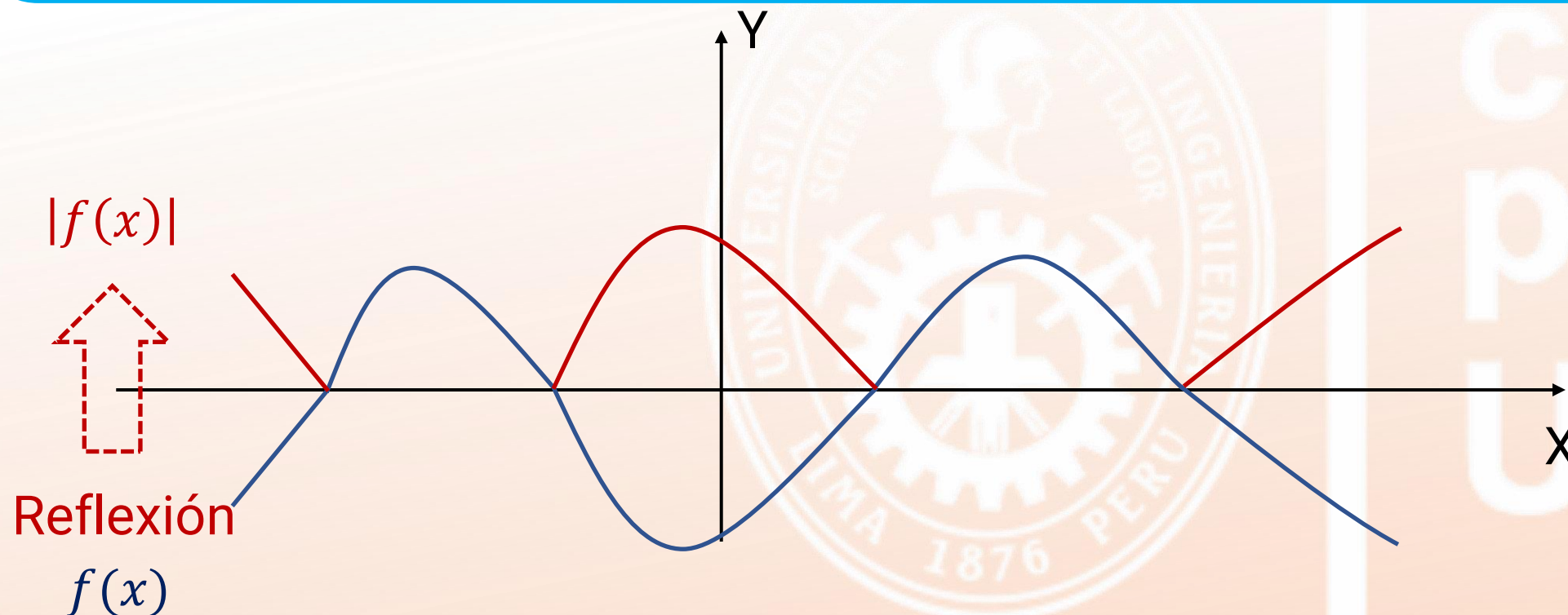


TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

GRAFICAS CON VALOR ABSOLUTO

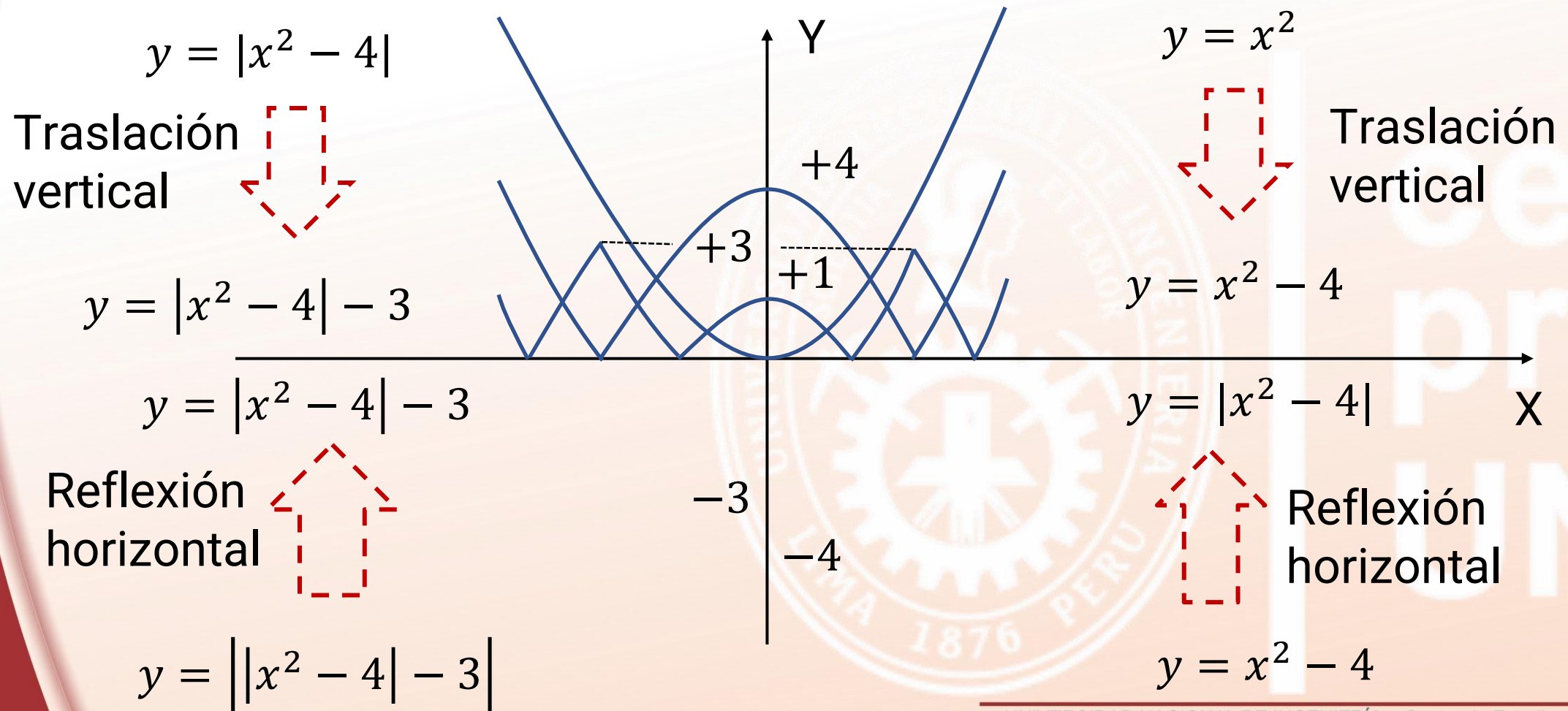
La gráfica de $y = |f(x)|$, se obtiene:

- Si $f(x) \geq 0$ la gráfica no cambia.
- Si $f(x) < 0$ la gráfica se obtiene reflejando verticalmente la gráfica que esta por debajo del eje X .



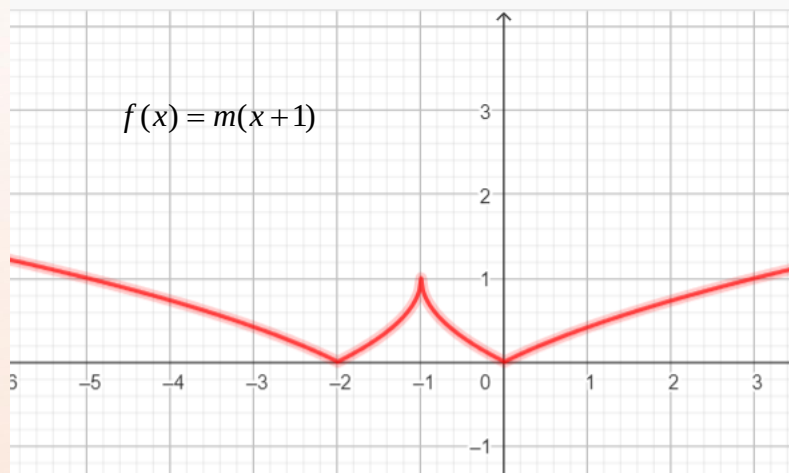
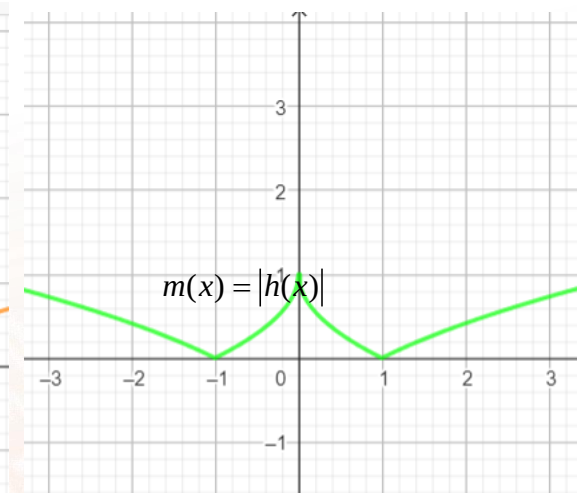
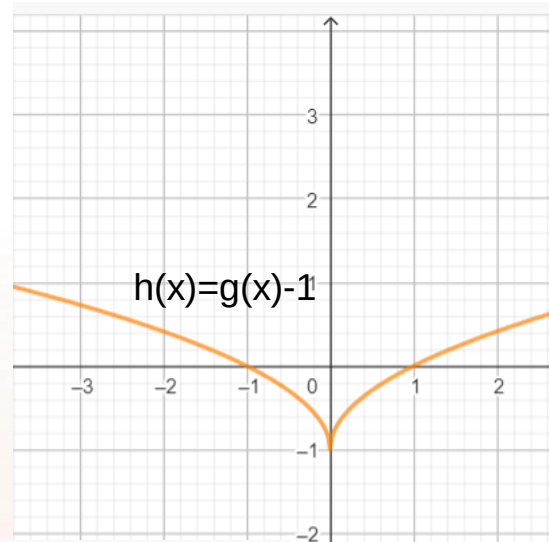
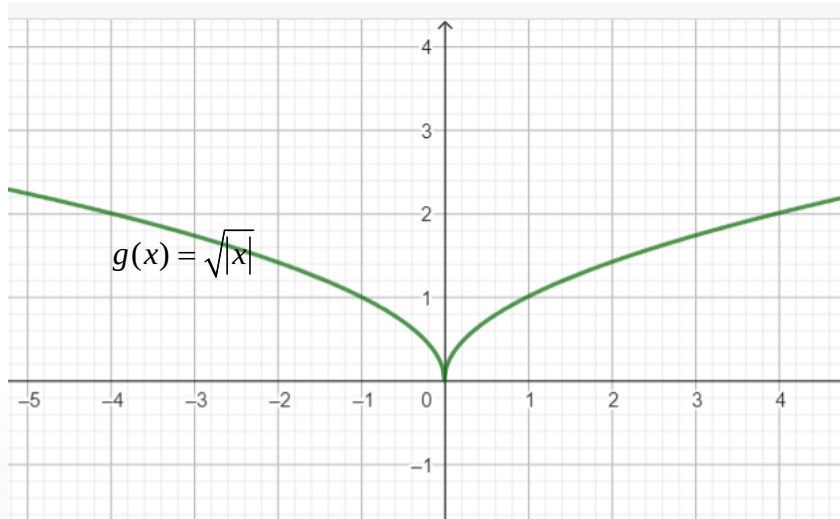
Ejemplo - 2008-2 :

Determine la gráfica de $f(x) = ||x^2 - 4| - 3|$



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

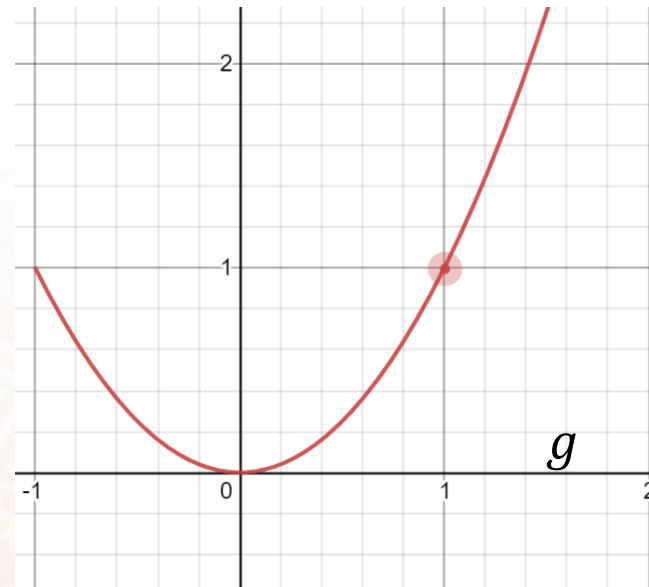
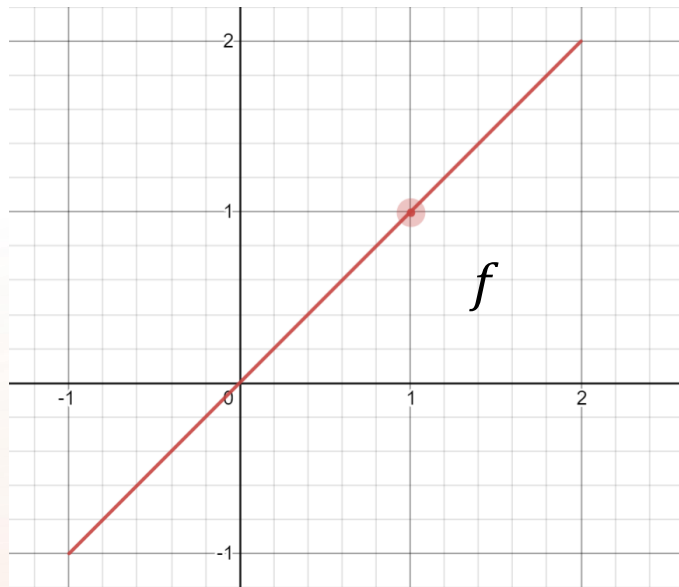
Ejercicio: Determine la gráfica de $f(x) = \left| \sqrt{|x+1|} - 1 \right|$



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Ejercicio:

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas se muestran respectivamente.



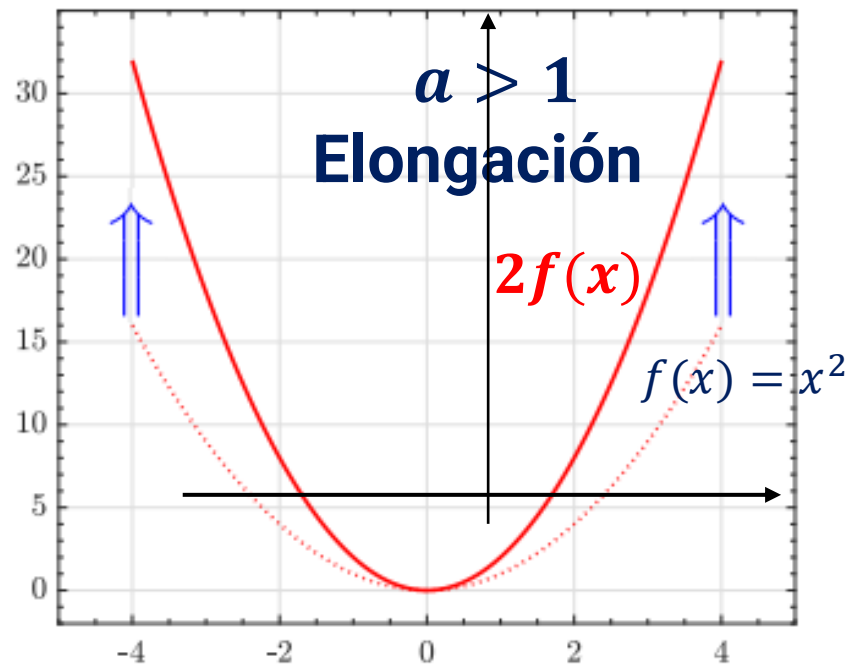
Determine la gráfica de $h(x) = 1 + |f(-2x) + g(x - 1)|$

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

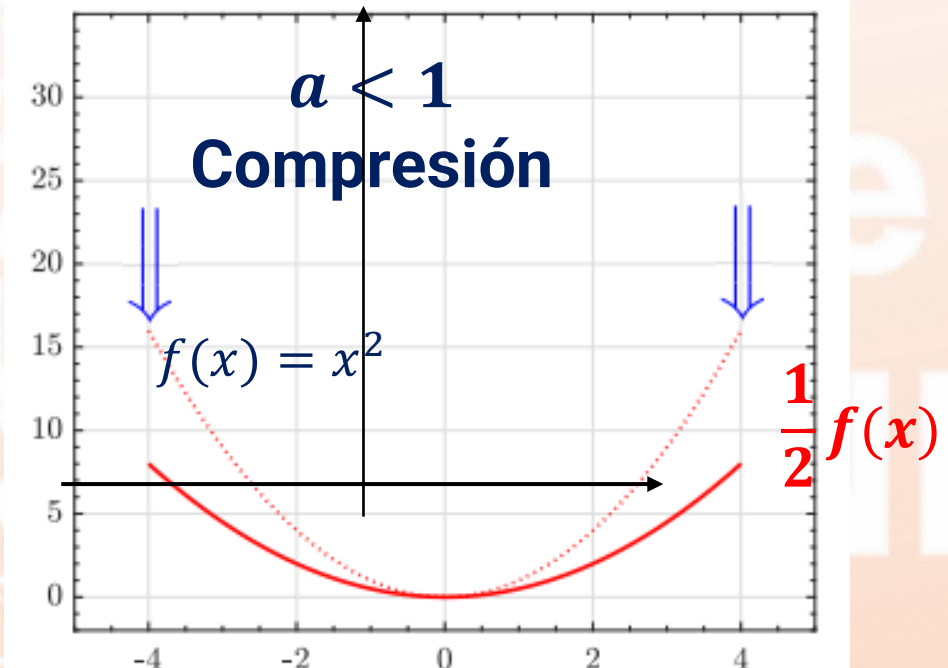
ELONGACION Y COMPRESION VERTICAL

La gráfica de $y = \alpha f(x)$, se obtiene multiplicando las ordenadas por α :

- $y = \alpha f(x)$ es **elongación vertical** de $f(x)$ si $\alpha > 1$
- $y = \alpha f(x)$ es **compresión vertical** de $f(x)$ si $\alpha < 1$



$$f(x) = x^2$$

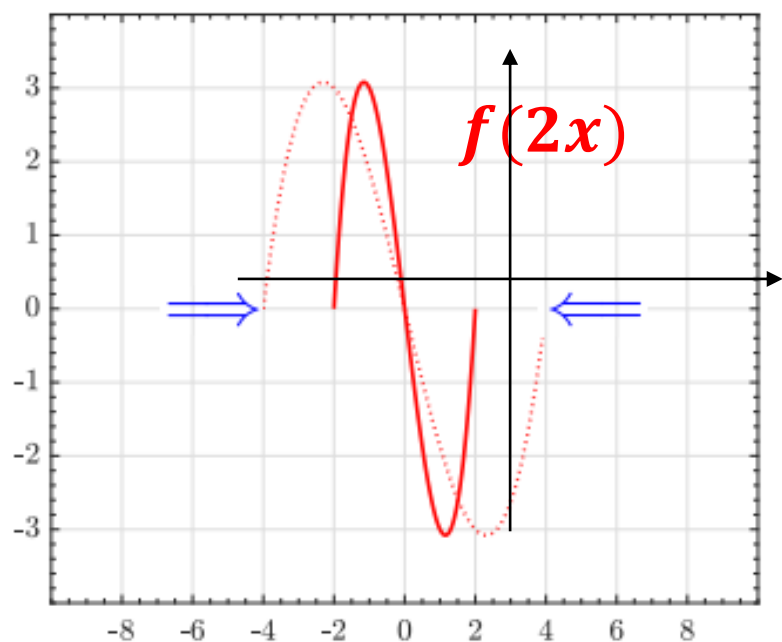


TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

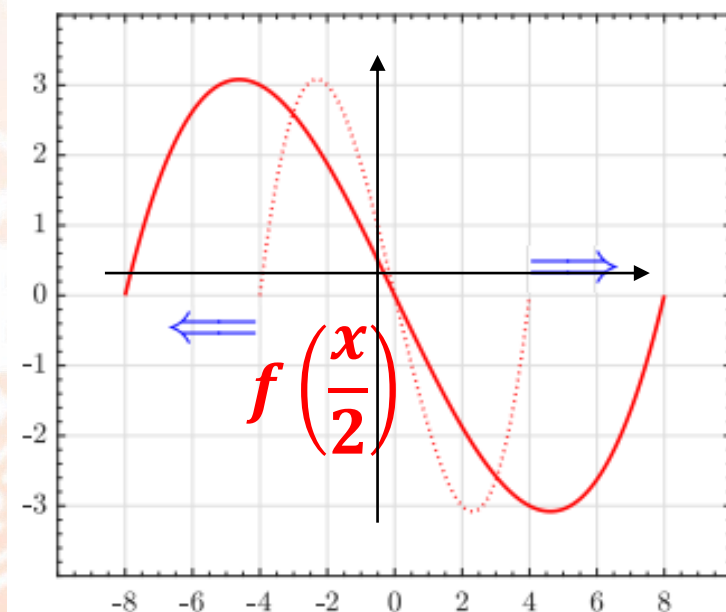
ELONGACION Y COMPRESION HORIZONTAL

La gráfica de $y = f(\alpha x)$, se obtiene multiplicando las abscisas de $f(x)$ por α^{-1} :

- $y = f(\alpha x)$ es una **compresión horizontal** de $f(x)$ si $\alpha > 1$
- $y = f(\alpha x)$ es una **elongación horizontal** de $f(x)$ si $0 < \alpha < 1$

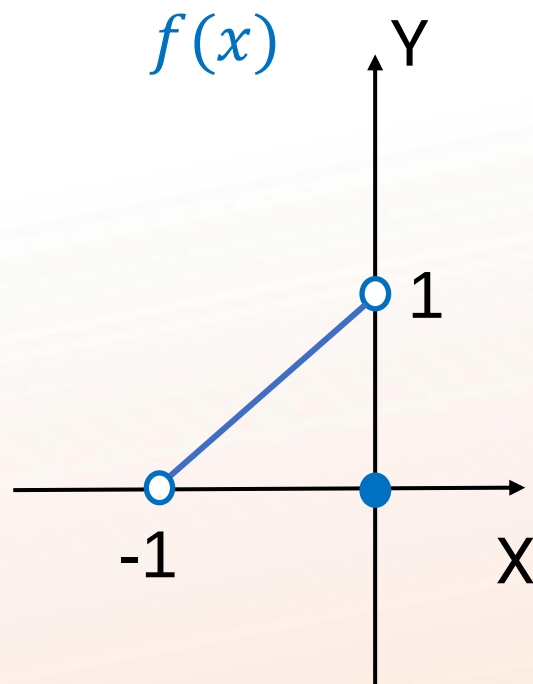


$$f(x) = (x - 2)(x + 1)x$$

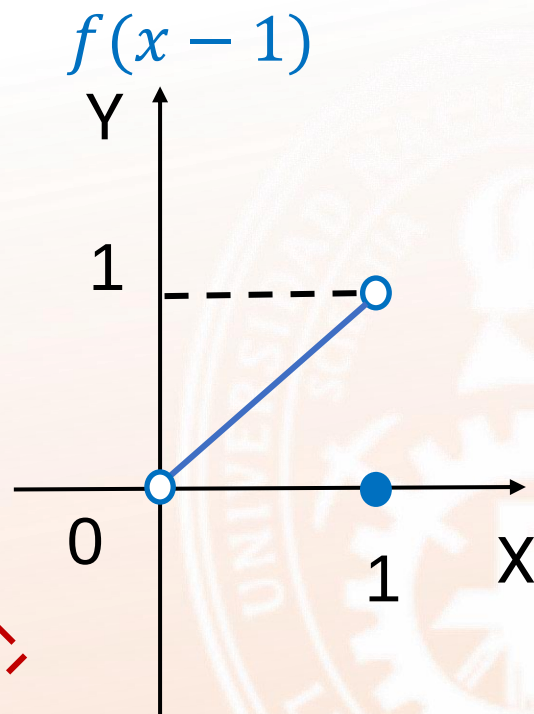
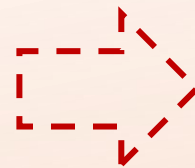


TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

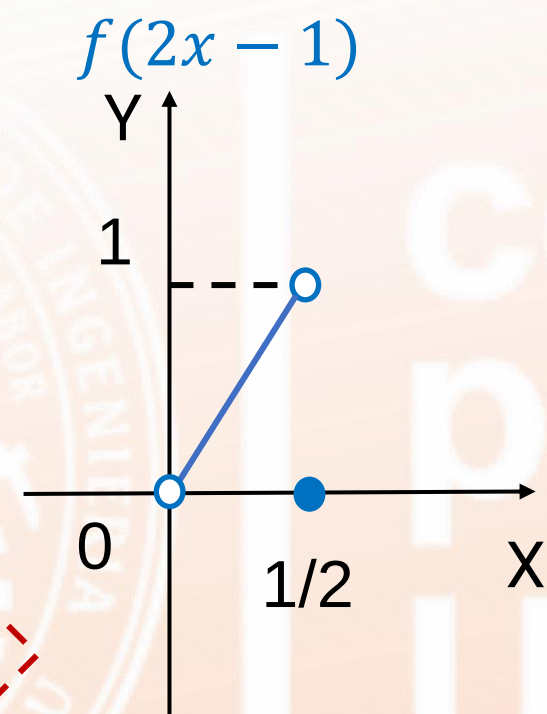
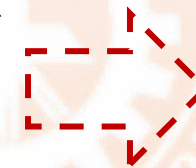
Ejemplo: Dada la gráfica de f . Determine la gráfica de $f(2x - 1)$



Traslación horizontal
 $f(x - 1)$



Compresión horizontal
 $f(2x - 1)$



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Ejercicio:

Dada la gráfica de f . Determine la gráfica de:

a) $y=f(-x)$ b) $y=f(-|x|)$ c) $y=-f(2-x)$ d) $y=|2-f(1-|x|)|$

